EXERCICE 8

Nom : yAHyA Limame

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2\cos x$, $g(x) = 1 + \sqrt{3}\cos x - \sin x$

(C) et (C') leurs courbes représentatives respectives, dans le même repère orthonormé.

1) Etudier les variations de f et construire (C)

2) Démontrer que (C') l'image de (C) par une transformation simple que l'on caractérisera

3) Construire (C')

Solution

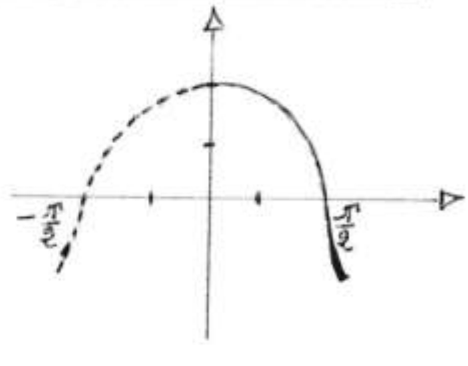
$f(x) = 2\cos x$

$D_f = \mathbb{R}$

f est périodique de période 2π est pair il suffit d'étudier sur demi période $[0;\pi]$

$f'(x) = -2\sin x < \forall x \in [0,\pi]$

	0	π
$f'(x)$	—	
$f(x)$	2 ↘	-2



$g(x) = 1 + \sqrt{3}\cos x - \sin x$

$= 1 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$

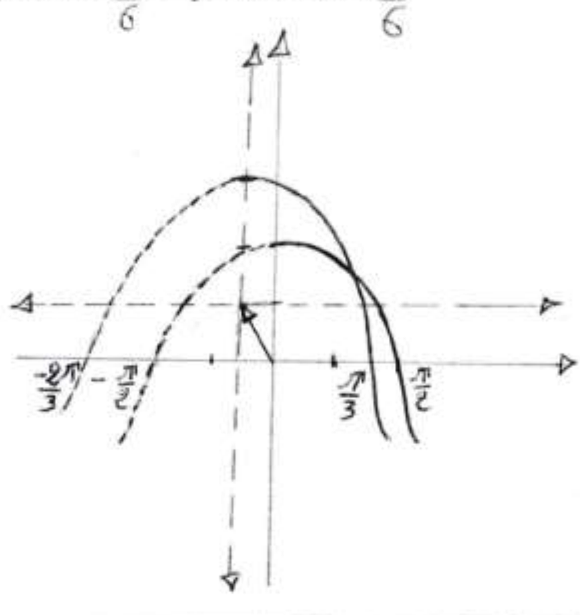
$= 1 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$t_{\vec{u}}\binom{0}{1}$ $t_{\vec{v}}\binom{-\frac{\pi}{6}}{0} \Rightarrow t_{\vec{w}}\binom{-\frac{\pi}{6}}{1}$

$g(x) = 1 + f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$Y = f(x)$, $Y = y - 1 \Rightarrow y = Y + 1$

$X = x + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = X - \frac{\pi}{6}$



EXERCICE

Nom: YAHYA'Limame

Soit f la fonction de variable réel definie par

$$f(x)=\frac{x+x^2+\dots+x^{2015}-2015}{x-1}$$

calculer $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}$, $(k\in\mathbb{N}^*)$ en deduire $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

Solution

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}$ (F.I)

on pose $g(x)=x^k$

Alors $g(1)=1$

et $\forall x\in\mathbb{R}$ $g'(x)=k.x^{k-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$$

$$=k\times 1^{k-1}=k\times 1=k$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}=k$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\dots+x^{2015}-2015}{x-1}\ \text{(F.I)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\dots+x^{2015}-(\underbrace{1+1+\dots+1}_{2015\ \text{fois}})}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\dots(x^{2015}-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x-1}+\frac{(x^2-1)}{x-1}+\dots\frac{(x^{2015}-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\sum_{k=1}^{2015}\frac{x^k-1}{x-1}=\sum_{k=1}^{2015}\lim\frac{x^k-1}{x-1}$$

$$\sum_{k=1}^{2015}k=1+2+\dots 2015$$

somme des 2015 premiers termes d'une (S.A) de premier terme $=1$ et de raison $r=1$

Donc $\sum\limits_{k=1}^{2015}k=\frac{2015}{2}(1+2015)$

$=2015\times 1008=2031120$.

EXERCICE 2

Nom : yAHyA Limame

Soit f la fonction de variable réel définie par

$$f(x) = \frac{(1+x)^{2015} - 1}{x}$$

Démontrer que f admet un prolongement par continuité g au point $x_0 = 0$

Préciser $g(x)$.

Solution $f(x) = \frac{(1+x)^{2015} - 1}{x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{(1+x)^{2015} - 1}{x} \quad (F.I)$$

on pose $g(x) = (1+x)^{2015}$, $g'(x) = 2015(1+x)^{2014}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0)$$

$$= 2015 \times 1^{2014} = 2015$$

Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 2015$

D'où f admet un prolongement par continuité g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 2015 \end{cases}$$

EXERCICE 4 Nom: YAHYA Limame

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a.b]$
telle que : $f(a)<ab$ et $f(b)>b^2$
Demontrer qu'il existe un réel c tel que $f(c)=bc$
(on pourra appliquer le theoreme des valeurs intermediaires
à la fonction $x \longmapsto f(x)-bx$)

Solution

on pose $g(x)=f(x)-bx$
* g est continue sur $[a,b]$
car somme de fonctions continues
sur $[a,b]$
$(x \longmapsto f(x))$: donnée
$(x \longmapsto -bx)$: polynome
* $g(a)=f(a)-ba<0$
car $f(a)<ab$
* $g(b)=f(b)-b^2>0$
car $f(b)>b^2$
Donc $g(a).g(b)<0$
D'aprés (T.V.I)
l'equation $g(x)=0$
admet au moins une solution $c\in[a,b]$ c'est à dire qu'il existe un réel $c\in[a,b]$ tq $g(c)=0$
$\Rightarrow f(c)-bc=0 \Rightarrow$
$f(c)=bc$.

EXERCICE 7

Nom : YAHYA Limame

Soit f et g les fonctions definies par $f(x) = x^2 - 2x + a$
$g(x) = -x^2$
Determiner le réel a pour que les courbes representatives de f et de g dans le même repère orthonormé aient une tangente en un point.

Solution :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + a \\ g(x) = -x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(x) = 2x - 2 \\ g'(x) = -2x \end{cases}$$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ aient une tangent en un point si
$$\begin{cases} f(x_0) = f'(x_0) \\ g(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + a = -x_0^2 & (1) \\ 2x_0 - 2 = -2x_0 & (2) \end{cases}$$

(2) $4x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$; dans (1) $a = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
$f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php